

Vor Gebrauch bitte lesen!

Der nachfolgende Aufsatz unterliegt dem Urheberrecht. Der gesamte Aufsatz ist demnach urheberrechtlich geschützt. Das Urheberrecht liegt bei mir, dem Verfasser, Wolfgang Buschlinger.

Das Zitieren ist natürlich möglich, sogar erwünscht. Wenn aus dem Aufsatz zitiert wird, dann bitte unter vollständiger Angabe von Titel, Autor, URL der Web-Site, Aufruf-Datum.

Zur Information: Ich habe den Aufsatz im September 2011 beim Journal „Rheinisches Museum für Philologie“ eingereicht. Er wurde dort ohne Angabe von Gründen abgelehnt. Trotzdem halte ich den Aufsatz für gut. (Denke, die Gutachter beim Rheinischen Museum sind halt Philologen und haben deshalb kein Gespür dafür, wie es ist, die Welt mit pythagoreischen Augen wahrzunehmen. Vielleicht liege ich aber auch falsch.)

In jedem Fall eröffnet der Aufsatz eine Perspektive auf Platon, die ich für sympathisch halte. Für mich ist Platon – mit Blick auf die Art und Weise, wie er mathematische Dinge verklausuliert – ein David Lynch der Antike. Kein schlechtes Prädikat, wie ich finde. Viel Vergnügen beim Lesen!

Wiesbaden, 05. Dezember 2011

Wolfgang Buschlinger

DIE VERHÄLTNISSE IM LINIENGLEICHNIS UND DER SATZ DES PYTHAGORAS

Die Frage danach, warum die Streckenverhältnisse im Liniengleichnis gerade so gewählt sind, wie sie es sind, ist bis heute nicht ganz zufriedenstellend geklärt. Reinhold Merkelbach hat zu diesem Thema vor einigen Jahren einen interessanten Aufsatz verfasst, in dem er die Standard-Interpretation des Liniengleichnisses verwirft mit Verweis darauf, dass „das Liniengleichnis im VI. Buch der *Politeia* an einer Stelle (510a9-10) durch eine Interpolation unterbrochen [werde], die den Sinn verdirbt.“¹ Merkelbach argumentiert dabei vergleichsweise stark mathematisch; vor allem stößt er sich daran, dass durch die genannte Stelle zwei der vier Strecken im Liniengleichnis dieselbe Länge haben müssten (stimmt!), – was aber nicht sein könne (stimmt nicht!); deshalb müsse es sich bei der fraglichen Stelle um eine Interpolation handeln (stimmt folglich auch nicht!). Norbert Delhey wiederum verteidigt einige Jahre später die Standard-Interpretation, aber nicht mit mathematischen, sondern mit hermeneutischen Argumenten, die sich insbesondere gegen Merkelbachs zu starke mathematische Deutung der Verhältnisse im Liniengleichnis richten und gegen Merkelbachs Auffassung, es könne nicht sein, dass zwei Strecken dieselbe Länge haben.² Ich behaupte nun, beide Seiten haben auf ihre Weise Recht; Delhey in der Sache – die Standard-Interpretation ist demnach sachlich angemessen – und Merkelbach nicht in der Sache, aber mit seiner mathematischen Herangehensweise, und zwar deshalb, weil auch die Standard-Interpretation mathematisch fundiert werden kann, wenn auch in ganz anderer und plausibleren Weise als bei Merkelbach. Zu diesem Zweck biete ich eine Alternativ-Deutung, in der die Streckenverhältnisse durchgängig im Lichte des Satzes des Pythagoras gedeutet werden. Dies alles auseinanderzusetzen erfordert einige Geduld.

Zunächst: Zwischen Merkelbach, Delhey und mir herrscht in folgendem Punkt Einigkeit. Die eine Gesamtstrecke im Liniengleichnis dient zur Repräsentation der Gesamtheit des Erkennbaren.³ Die Gesamtheit des Erkennbaren besteht dabei aus den beiden Bereichen ‚sinnlich Wahrnehmbares‘ und ‚durch Vernunft Wahrnehmbares‘. Jeder dieser beiden Teilbereiche untergliedert sich seinerseits wiederum in zwei weitere unterschiedliche Teilbereiche. Die Gesamtstrecke besteht demnach aus vier Teilstrecken (a , b , c , d), die sich (auch ohne 510a9-10) zueinander verhalten wie $a : b = c : d$. Es ergibt sich folgendes klassische und bekannte Schema:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \delta\acute{o}\xi\alpha & & & & \nu\acute{o}\eta\sigma\iota\varsigma \\
 & & \text{περὶ γένεσιν} & & & & \text{περὶ οὐσίαν} \\
 \text{εἰκασία} & : & & \text{πίστις} & = & \text{διάνοια} & : & \text{ἐπιστήμη} \\
 a & : & & b & = & c & : & d
 \end{array}$$

So weit, so gut. Bis hierher ist alles unstrittig. Dann kommt aber die Deutung des Satzes (510a9-10):

ὡς τὸ δοξαστὸν πρὸς τὸ γνωστὸν, οὕτω τὸ ὁμοιωθὲν πρὸς τὸ ὅτι ὁμοιώθη

¹ R. Merkelbach, Eine Interpolation im Liniengleichnis und die Verhältnisgleichungen, RhM 135, 1992, 235-242.

² N. Delhey, Eine Interpolation im Liniengleichnis?, RhM 140, 1997, 231-241.

³ Die präzise Unterscheidung bzw. Nichtunterscheidung zwischen Epistemologie und Ontologie in der Philosophie Platons ist mir an dieser Stelle einerlei. Ich bin mir Platons Epistemo-Ontologie bewusst, die Details spielen aber keine Rolle für das, was ich in diesem Aufsatz zu sagen habe.

Und von diesem Satz behauptet Merkelbach nun, es handele sich um eine Interpolation. Denn, so Merkelbach, dieser Satz liefe darauf hinaus, dass nicht nur $a : b = c : d$ gelte, sondern ebenso und viel weitreichender auch

$$a : b = c : d = (a + b) : (c + d).$$

Gölte dies, dann wäre aber $b = c$, und demnach kämen in den vier Positionen des Liniengleichnisses nicht vier verschiedene Größen vor, sondern nur drei; es wäre also eigentlich nicht richtig zu schreiben $a : b = c : d$, richtig sei vielmehr $a : b = b : d$. Das aber, so Merkelbach auf 238, „wäre offensichtlich falsch und würde den philosophischen Sinn des Liniengleichnis zerstören. Wenn die zweite und dritte Position einander mathematisch gleich wären, müssten sie auch philosophisch gleich sein.“ Im Übrigen sei eine andere Proportion Grundlage des Liniengleichnisses, und zwar

$$a : b = b : c = c : d.$$

Diese spiele bei der Lösung des Delischen Problems (Verdoppelung des Würfels) und bei der Verdoppelung des Quadrates (*der Aufgabe des Menon*) eine Rolle.⁴

Dazu ist folgendes zu sagen: a) Merkelbachs Ergebnis hinsichtlich der Gleichheit von b und c stimmt. Man kann das auf verschiedene Weisen einsehen, eine davon ist sicherlich die algebraische in Merkelbachs Aufsatz. Im Übrigen ist die Gleichheit von b und c lange bekannt.

b) Merkelbachs Argumentation zugunsten der Behauptung, 510a9-10 sei eine Interpolation, hängt bezüglich ihrer Gültigkeit sehr stark ab von seiner – wohl hausgemachten – Schlussfahrkarte: „Was mathematisch gleich ist, das muss auch philosophisch gleich sein.“ Hausgemacht ist diese Implikation, weil erst Merkelbach selbst sie so einführt. Eine Schlussfahrkarte ist sie, weil sie per logischem Schluss (per modus tollens) die Reise zum Ergebnis (510a9-10 ist eine Interpolation) garantieren soll. Die Gültigkeit dieser Schlussfahrkarte aber ist sicherlich mehr als fragwürdig. Da mich diese Fragwürdigkeit hier nicht interessiert, verweise ich auf die vielseitige Kritik von Delhey (236-240). Zu allen Argumenten, die dort angeführt sind, würde ich allerdings noch ein weiteres anfügen wollen. Es lautet so: Zwar sind die beiden Strecken im Liniengleichnis zugegebenermaßen gleich lang. Aber aus der Gleichheit der Streckenlänge folgt nicht die Gleichheit der Strecke selbst. (Und das würde ich unter ‚mathematisch gleich‘ verstehen.) Demnach würde in meiner Sicht der Dinge die Schlussfahrkarte Merkelbachs noch nicht einmal anwendbar sein, ganz unabhängig davon, ob sie gültig ist oder nicht.

Also angenommen, Merkelbach hat sachlich unrecht. Deswegen ist aber seine Herangehensweise noch nicht wertlos, sondern im Gegenteil bemerkenswert. Warum? Merkelbach versucht nämlich, dem Pythagoreer Platon gerecht zu werden. Damit meine ich: Platon ist Pythagoreer nicht nur in dem Sinne, dass er mathematisch geschult und von Mathematik fasziniert ist; darüber hinaus orientiert er seine gesamte Epistemo-Ontologie am Paradigma Mathematik. Und zwar nicht an irgendeinem oder gar modernen Verständnis von Mathematik, sondern am pythagoreischen.⁵ Dieses pythagoreische Verständnis von Mathematik läuft im Kern auf die Überzeugung hinaus: Zahlen und Proportionen sind weltkonstitutiv, sie machen, dass Dinge überhaupt da sind

⁴ Vgl. Merkelbach (wie Anm. 1) 240 f., ähnlich in Delhey (wie Anm. 2) 232.

⁵ Man kann Platons Philosophie völlig zwanglos als Verallgemeinerung pythagoreischen Gedankenguts betrachten.

und dass sie sind, wie sie sind; und deshalb findet man sie auch, in allem, was ist. Mit Blick auf Platon heißt das: Wenn Platon bei der Illustration der Beziehungen im Erkennbaren (oder wahlweise: im Bereich dessen, was es gibt) ein Gleichnis wählt, in dem Verhältnisse (Proportionen) offensichtlich auftauchen, dann ist das kein Zufall, genauso wenig wie die Größen der Verhältnisse selbst ein Zufall sind.⁶ Und dann stellt sich automatisch die Frage: Welcher mathematische Sachverhalt verbirgt sich im Liniengleichnis, welches mathematische Gegebenheit hat Platon wissenden Auges, also absichtlich eingebaut?⁷ – Merkelbach hat versucht, diese Frage zu beantworten, wenn auch falsch. Hier ist meine Antwort.

I Die Verhältnisse im Liniengleichnis und die erste Binomische Formel

Ich gehe zunächst davon aus, dass 510a9-10 keine Interpolation ist. Damit gelten die beiden Gleichungen

$$a : b = c : d \quad \text{und} \quad c : d = (a + b) : (c + d).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst die Gleichheit von b und c . Wir Modernen erweisen diese Gleichheit in der Regel algebraisch, und lassen es dann dabei bewenden. (Merkelbach tut das auch, und an seinen algebraischen Umformungen ist nichts zu beanstanden.) Jemand, der die algebraische Vorgehensweise nicht kennt, würde natürlich nicht so vergehen können, und sicher ist: Die algebraische Art ist keine altgriechische, ist keine historisch angemessene. Historisch angemessen müssen die Verhältnisse im Liniengleichnis also primär geometrisch betrachtet werden. (Zudem könnte sich die charakteristische Eigenart der Algebra – ihre abstrahierte Allgemeinheit, also die Eigenschaft, von konkretisierenden und damit auch von geometrischen Einbettungen ausdrücklich abzusehen – als Grund dafür erweisen, dass einem Modernen die geometrische Bedeutung der Gleichheit von b und c entgeht.)

Worin besteht nun die geometrische Bedeutung des Ergebnisses $a : b = b : d$? Sie besteht grob gesprochen darin, dass die so gewählten Verhältnisse eine Verallgemeinerung der Argumentation aus dem *Menon* sind. Noch anders ausgedrückt: Die Verhältnisse im Liniengleichnis sind eine verinnerlichte Abkürzung, ein Shortcut des (Beweis des) Satzes des Pythagoras in seiner allgemeinen Form. Um das einzusehen, bedarf es der Darlegung von sechs Einzelschritten, die von $a : b = b : d$ über die erste Binomische Formel zum Satz des Pythagoras führen. Hier die Einzelschritte bis zur ersten Binomischen Formel:

Schritt 1. In der Gleichung $a : b = b : d$ ist nicht nur enthalten, dass b und c die gleiche Größe haben; darüber hinaus setzt die Gleichung natürlich automatisch auch a und d in

⁶ Um es klar auszusprechen: Dieser Zusammenhang zwischen Platons Neigung, die gesamte Welt pythagoreisch zu strukturieren, einerseits und den Verhältnissen im Liniengleichnis andererseits ist meine – hoffentlich nicht hausgemachte – Schlussfahrkarte. Noch deutlicher: Wer so an Platons Texte herangeht wie ich oder Merkelbach, unterliegt oft genug und auch zu Recht dem Verdacht, Dinge in etwas hineinzugeheimnissen. (Ich erinnere nur an die Zahl der Autoren, die die Verhältnisse im Liniengleichnis für Zufall halten.) Der Verdacht aber ist das eine, das andere ist die Frage, ob ein solcher Verdacht berechtigt ist oder nicht. Das Zugeständnis der Berechtigung hängt ab auch von der angebotenen Plausibilität des Zusammenhangs zwischen Mathematik und Liniengleichnis. Diesem Zusammenhang widmet sich dieser Aufsatz in allem Folgenden.

⁷ Es muss noch einmal betont werden, dass sich diese Frage nur stellt, wenn man den pythagoreischen Blick auf Platon aufgesetzt hat, wenn man also die Verhältnisse im Liniengleichnis nicht für zufällig hält. Eine Zusammenstellung von Autoren, die sich in dieser Frage positiv oder negativ geäußert haben, gibt Delhey (wie Anm. 2) 237, dort auch Anmerkung 16.

eine bestimmte festgelegte Beziehung. Diese Beziehung wird besonders deutlich, wenn a den Wert 1 hat. Dann ergibt sich für d (automatisch) der Wert b^2 . (Die Gleichung hat dann die Form $1 : b = b : b^2$.)

Schritt 2. Es ist legitim und für die Zwecke hier sinnvoll, die Gleichung $a : b = b : d$ so zu betrachten, als habe a immer den Wert 1 . Durch diese Betrachtung wird die Gleichung – mathematisch gesprochen – lediglich normiert.⁸ Solche Normierungen haben immer nur den einen Zweck, sie dienen einzig der Konvenienz. Sie sollen Dinge also deutlicher oder leichter handhabbar machen. An den grundlegenden Sachverhalten ändern Normierungen aber nichts, Normierungen sind proportionentreu. Für den Fall hier heißt dies: ob man nun $a : b = b : d$ betrachtet oder $1 : b = b : b^2$, ist für den grundlegenden Sachverhalt irrelevant, ist aber für die *Erkenntnis* dieses grundlegenden Sachverhalts aber nützlich und bedeutsam. Das gilt sowohl für die Leser und Leserinnen dieses Aufsatzes wie für Menschen zur Zeit Platons.⁹

Schritt 3. Es lässt sich nun die Frage nach der Gesamtlänge der Strecke stellen, die im Liniengleichnis eine Rolle spielt. Ausgehend von der normierten Form der Gleichung $1 : b = b : b^2$ lautet die Antwort folglich: $1 + b + b + b^2$. Diese Streckenlänge lässt sich auch darstellen als:

$$1 + 2 \cdot b + b^2 \quad \text{bzw. noch klarer als} \quad 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot b + b^2.$$

Ersetzt man jetzt die Zahl 1 der Wiedererkennbarkeit halber durch die Variable a , so erhält man für die Gesamtlänge der Strecke:

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Die Frage nach der Gesamtlänge der Strecke ist dabei mehr als eine mathematisch-theoretische. Die Gesamtlänge ist nämlich ein Maß für den Gesamtbereich des überhaupt Erkennbaren, und dies freilich nicht als absolutes Maß in irgendwelchen wie auch immer gearteten ‚Erkenntniseinheiten‘, sondern ein Relativmaß, das seine Bestandteile in Beziehung setzt. Das Relativmaß des Erkennbaren unter Berücksichtigung(!) der Stelle 510a9-10 ist also gerade $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

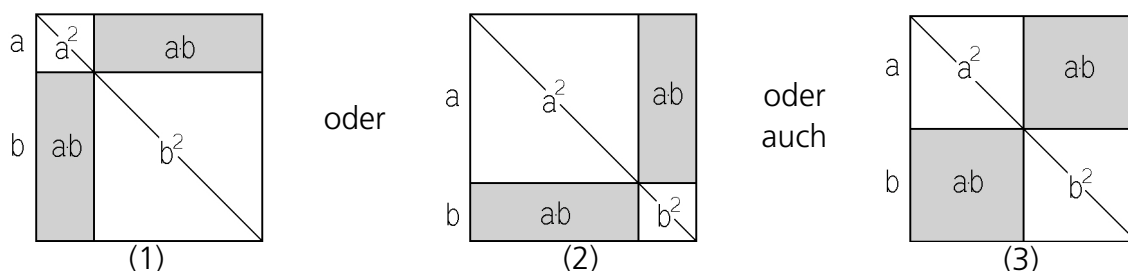
Schritt 4. Die anschließende Frage muss nun lauten: Welche Bewandnis hat es mit diesem auf den ersten Blick seltsamen Wert? Warum ist diese Streckenlänge gerade so und nicht anders gewählt? – Eine erste Antwort lässt sich aus dem offenkundigen Tatbestand ableiten, dass $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ die eine Seite der ersten Binomischen Formel darstellt:

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$

Man könnte auch sagen: In das Liniengleichnis ist eigentlich ein Flächengleichnis eingebaut. Es weist den Bereichen εἰκασία, πίστις, διάνοια und ἐπιστήμη Flächen zu, und zwar nach der ersten Binomischen Formel, geometrisch veranschaulicht also zum Beispiel so:

⁸ Mathematisch ist das dasselbe wie die Gleichung $a : b = b : d$ durch a zu dividieren, mit dem Ergebnis: $a/a : b/a = b/a : d/a$. Dann setze man $b' = b/a$.

⁹ Normierung dieser Art sind pythagoreischer Standard und auch für die Euklids Elemente unausweichlich. Der tiefere Grund dafür ist das Fehlen einer absoluten Grundeinheit. Aufgrund des Fehlens dieser Grundeinheit können zum Beispiel alle Beweise in Euklids Elementen nicht als absolute, sondern nur als proportionstreue Beweise aufgefasst werden.



mit $a^2 = \text{εἰκασία}$, das eine $ab = \text{πίστις}$, das andere $ab = \text{διάνοια}$, $b^2 = \text{ἐπιστήμη}$.

Wählt man die hier angebotene Flächenperspektive auf das Liniengleichnis, übertragen sich die Längenverhältnisse des Liniengleichnisses unverändert auf die Flächengrößen. Folglich entsprechen größere Flächen(inhalte) größeren Streckenlängen und umgekehrt, und ebenso entsprechen gleiche Flächen(inhalte) gleichen Streckenlängen und umgekehrt.

Schritt 5. Zunächst: Alle drei Flächenverteilungen oben sind mathematisch möglich, sie sind aber nur Beispiele aus einer unendlichen Menge möglicher Verteilungen. Denn für jeden Punkt der Diagonalen lässt sich eine zugehörige Flächenverteilung bestimmen, und zwei unterschiedliche Punkte liefern nie dieselbe Flächenverteilung. Da es unendlich viele Punkte der Diagonalen gibt, gibt es auch unendlich viele unterschiedliche Flächenverteilungen. Soweit die mathematische Betrachtung.

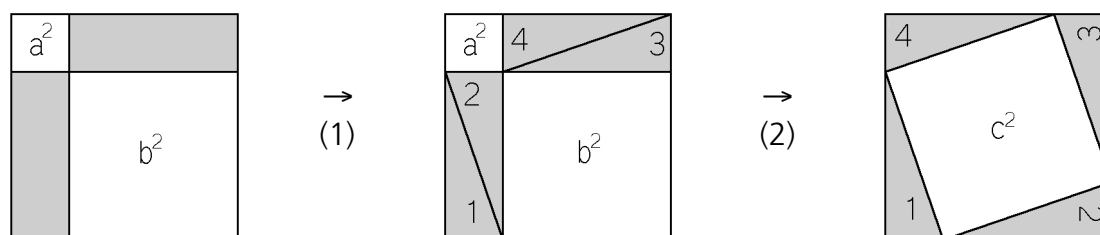
Dann: Nach Platon aber sind nicht all diese Flächenverteilungen möglich. Erstaunlicherweise kapriziert sich Platon aber nicht positiv auf eine oder nur einige wenige der Flächenverteilungen, sondern nimmt – negativ – nur genau eine ausdrücklich heraus, nämlich diejenige Verteilung, bei der die Flächen alle gleich groß sind. (Bei den obigen Veranschaulichungen also das Beispiel (3).) Platon tut dies in 509d in den Worten: ὡσπερ τοίνυν γραμμὴν δίχα τετμημένην λαβὼν ἄνισα τμήματα. Warum er dies tut, dazu später mehr (bei den Ausführungen zum ‚Spezialfall‘).¹⁰ Es bleibt demnach festzuhalten: Im Prinzip jedenfalls ist es nach Platon möglich, dass dem so wichtigen Bereich der ἐπιστήμη die kleinste Fläche bzw. die kleinste Strecke entspricht.

II Die erste Binomische Formel und der Satz des Pythagoras

Schritt 6. Warum aber sollte Platon ausgerechnet die erste Binomische Formel in sein Liniengleichnis implementieren (und nicht die zweite oder dritte oder irgendetwas anderes)? Nun, das wiederum liegt für mein Dafürhalten an der Verwandtschaft von erster Binomischer Formel und (Beweis des) Satz des Pythagoras. Aus der ersten Binomischen Formel lässt sich dieser Beweis bzw. dieser Satz nämlich im Handumdrehen ableiten. Dafür notwendig sind nur folgende zwei Operationen: (1) Ziehe in jedem der Rechtecke, die in den Beispiel grau eingefärbt sind und die das Maß $a \cdot b$ repräsentieren, eine Diagonale! (2) Verschiebe die dabei entstandenen Dreiecke passend, und das heißt

¹⁰ Merkelbach hat moniert, dass b und c nicht verschieden, sondern gleich sind, und behauptet, das sei unplatonisch. Was Merkelbach aber wohl nicht gesehen hat, was aber mindestens genauso erwähnenswert wäre, ist die Tatsache, dass Platon nur von Ungleichheit der Linie der gesprochen hat, und damit nicht den Fall ausschließt, dass d erheblich kleiner sein könnte als a (als Fläche dargestellt in der Abbildung 2). Platon würde damit der Hierarchie der Erkenntnisbereiche eine invertierte Hierarchie der Größenverhältnisse (als Linie oder Fläche) zuweisen. Von dieser Behauptung ließe sich mit Merkelbach nun genauso sagen, sie sei unplatonisch, und deshalb sei auch die Stelle 509d eine Interpolation. Im Lichte der Deutung hier verschwindet aber auch dieses Argument.

so, dass die rechten Winkel der Dreiecke in den rechten Winkeln des Quadrates zu liegen kommen! Fertig ist der Beweis. – Zur Veranschaulichung die beiden Operationen in ihrer geometrische Gestalt:

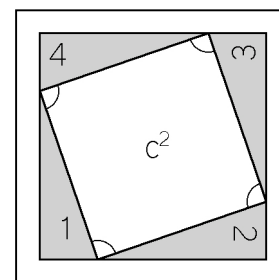


Hierzu einige Anmerkungen:

a) Man nennt diesen Beweis auch den ‚chinesischen Beweis‘ oder den ‚Beweis durch Ergänzung‘, im Englischen auch ‚proof by dissection‘, also Beweis durch Zerlegung.

b) Die Diagonale in den Rechtecken repräsentiert dabei die neue Länge c . Somit ergibt sich durch die Anschauung unmittelbar die Gültigkeit von $a^2 + b^2 = c^2$ in allen rechtwinkligen Dreiecken, da die Summe des Inhalts der weißen Flächen a^2 und b^2 in den beiden linken Abbildungen gerade gleich dem Inhalt der weißen Flächen in der rechten Abbildung ist, und das ist gerade c^2 . (Die Länge c selbst spielt im ursprünglichen Liniengleichnis und seiner Interpretation keine Rolle. Sie kommt erst dann ins Spiel, wenn man die Streckenlängen für $\pi\acute{\iota}\sigma\tau\iota\varsigma$ und $\delta\acute{\iota}\acute{\alpha}\nu\omicron\iota\alpha$ als Flächenmaße begreift.)

c) Euklid beweist den Satz des Pythagoras in den Elementen auf zwei unterschiedliche Weisen (in I, 47 und VI, 31), aber nicht auf diese hier, also nicht auf die ‚chinesische‘. Die beiden Beweise Euklids sind vergleichsweise anspruchsvoll, und es ist fraglich, ob Platon überhaupt einen der Euklidschen Beweise gekannt hat. Außer Frage aber steht die Möglichkeit, dass schon Pythagoras und dann natürlich erst recht Platon den obigen, den chinesischen Beweis gekannt haben. Dieser Beweis soll nach durchgängiger Meinung schon sehr alt sein. Schwarz etwa spricht davon, er sein in China schon etwa 1100 v. Chr. bekannt gewesen, in eine ähnliche Richtung geht auch Maor.¹¹ Alle zeitlichen Datierungen sind natürlich Schätzungen, die auf der Komplexität und den Voraussetzungen beruhen, die gegeben sein müssen, um einen entsprechenden Beweis führen zu können. Diese Voraussetzungen liefern Hinweise – wenn auch nicht auf einen exakten Zeitpunkt – so doch auf wenigstens auf ein Zeitintervall. Einen solchen Hinweis sieht Eves zum Beispiel gegeben in Proklos‘ Kommentar zum ersten Buch der Elemente. Um den chinesischen Beweis nicht nur anschaulich, sondern auch präzise im Sinne der Pythagoreer zu führen (woher weiß man denn eigentlich, dass die weiße Fläche, deren Größe in der Abbildung mit c^2 angegeben wird, tatsächlich ein Quadrat ist?), muss man nämlich unter anderem zeigen können, dass die nebenstehend jetzt eingezeichneten Winkel jeweils rechte und einander gleich sind. Dies wiederum setzt die Kenntnis voraus, dass die Summe der Innenwinkel gerade gleich zwei rechten ist. Diese Behauptung



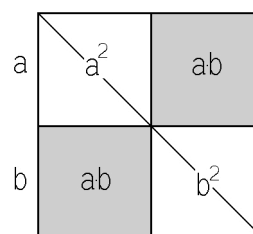
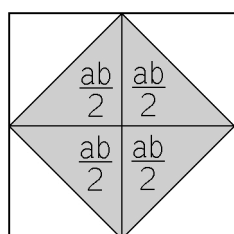
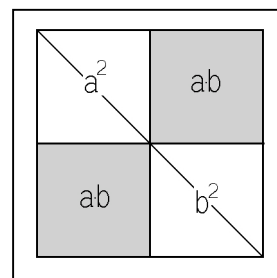
¹¹ Schwarz datiert ihn – allerdings ohne Referenz – auf 1100 v.Chr. (R. Schwarz, Brücke zur Höheren Mathematik. Reinbek 1975, 6). Maor schreibt die Kenntnis eines Spezialfalls des chinesischen Beweises (nämlich des Spezialfalls aus dem *Menon* (!)) bereits der Hindu-Mathematik zwischen 2000 und 600 v. Chr. zu (E. Maor, *The Pythagorean Theorem. A 4,000-year History*, Princeton 2007, 25).

aber sei den Pythagoreern schon bekannt gewesen, jedenfalls ließe sich dies aus dem Proklos-Kommentar ableiten.¹² Für Platon gilt das Gesagte dann natürlich erst recht. Soweit die sechs Einzelschritte, die zeigen sollen, dass im Liniengleichnis unter ausdrücklicher Berücksichtigung der Stelle 510a9-10 der Satz des Pythagoras und dessen Beweis verklausuliert – als Shortcut – eingebaut ist.

III Der Spezialfall und der *Menon*

Es kommt aber noch besser. Man kann nämlich die Frage stellen: Warum lässt Platon ausgerechnet den Spezialfall (nebenstehend) aus? Warum fordert er in 509d ausgerechnet ἄνισα τμήματα, also ungleiche Teilstücke, und lässt es nicht einfach bei Teilstücken im Allgemeinen bewenden? –

Die Antwort darauf lautet meines Erachtens: Weil er diesen Spezialfall als Beweis für den Satz des Pythagoras bereits abgearbeitet hatte, und zwar in der Sklavenszene im (relativ zur *Politeia*) vorher verfassten *Menon* 82d-85d. Dort geht es bekanntermaßen ja philosophisch gesehen vordergründig um die Anamnesis-Lehre. Und mathematisch gesehen liefert das Vorgehen dort – wiederum nur vordergründig – ‚nur‘ eine Methode zur Verdoppelung des Quadrates. Hintergründig ist aber auch dort etwas eingebaut, und zwar der Beweis des Satzes des Pythagoras für den Spezialfall des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks.¹³ Denn aus dem Resultat der Betrachtung in 85a (οὐχὶ τεττάρων ὄντων τούτων ἡμισυ ἐκάστου ἐκάστη ἢ γραμμὴ ἀποτέμνηκεν ἐντός, Abbildung links) gelangt man durch Umordnung sehr leicht zur Abbildung rechts und umgekehrt, also zum chinesischen Beweis Satzes des Pythagoras im Spezialfall des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks.



Resultat nach *Menon* 85a

(Übergang
durch
Umsortieren)

Ausgeschlossener Spezialfall im
Liniengleichnis 509d

Es ist also einerlei, ob man die Argumentation in der Dienerszene des *Menon* als Beweis für die Verdoppelung des Quadrates nimmt oder als Beweis des Satzes des Pythagoras im Spezialfall. Beide Argumentationen sind für sich nur unterschiedliche Sprechweisen über ein und dasselbe, bzw. beide Argumentationen sind Resultat unterschiedlicher Perspektiven auf ein und denselben Sachverhalt.

¹² H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*. Philadelphia ⁵1983, 54. Zitiert auch in Maor (wie Anm. 11) auf 62.

¹³ Mit der oftmals gehörten Behauptung, an dieser Stelle werde auch die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Dreiecke gezeigt, bin ich vorsichtig. Um diesen mathematischen Sachverhalt im *Menon* zu sehen, muss man den Argumentationsgang im *Menon* noch um die Methode der Wechselwegnahme bzw. des infiniten Regresses ergänzen. Das scheint mir aber mathematisch gesprochen viel mehr und anspruchsvoller als eine einfache Umordnung von Dreiecken es ist.

Berücksichtigt man diese Einsicht, dann ließe sich von Platon sagen: Der etwas jüngere Platon kapselt in seinem Werk *Menon* den Beweis eines Spezialfalls des Satzes des Pythagoras ein, der etwas ältere Platon tut im Prinzip dasselbe in der *Politeia*, nur mit einem verallgemeinerten Beweis. Platon scheint damit in seiner Entwicklung etwas nachzuvollziehen, das Pythagoras auch so widerfahren sein könnte. Maor äußert sich über den Spezialfall des Beweises und den Zusammenhang mit Pythagoras so: "On the other hand, there is some reason to believe that Pythagoras had first proved the special case of a right isosceles triangle, that is, a 45-45-90-degree triangle. The proof was already know to the Hindus, and Pythagoras may have heard of it during his travels around the Mediterranean."¹⁴ Treibt man mit Hilfe dieser Äußerung die Spekulation auf die Spitze, so lässt sich formulieren: Es besteht eine zeitliche Parallele mindestens in der Reihenfolge zwischen dem Beweis des Satzes des Pythagoras (erst der Spezialfall mit gleichschenkelig-rechtwinkligem Dreieck, dann der allgemeine chinesische Beweis) einerseits und andererseits der philosophischen Verarbeitung durch Platon in seinen Dialogen (der Spezialfall im *Menon*, die Verallgemeinerung im *Staat*). So scheint es jedenfalls die Mathematikhistorie anzudeuten.

Was bleibt? Und: Was bleibt jenseits aller kühnen Spekulation? – Nun, mindestens das folgende. Auch wenn man die Merkelbachsche Herangehensweise Ernst nimmt und Platon als einen pythagoreischen Mathematiker begreift, der Strukturelemente seiner pythagoreischen seiner Zahlen-Welt in seine Dialoge einbaut, so folgt daraus nicht, dass Merkelbachs mathematische Unterfütterung die einzige und die richtige ist, genauso wenig wie die mit ihr verbundene Konsequenz, es handle sich bei 510a9-10 um eine Interpolation. Vielmehr gibt es eine – und in meinen Augen – noch viel näher liegende mathematische Unterfütterung der Standard-Interpretation der Verhältnisse im Liniengleichnis, die darauf angewiesen ist, 510a9-10 nicht als Interpolation zu begreifen. In seiner ablehnenden Haltung Merkelbachs Interpolations-Argumentation gegenüber ergänzt dieser Aufsatz mit seiner mathematischen Argumentation die hermeneutischen Vorbehalte Delheys.

Darüber hinaus stellt die vorgeschlagene Unterfütterung für sich allein natürlich einen neuen Zusammenhang her zwischen der Dienerszene im *Menon* und dem Liniengleichnis der *Politeia*. Die Verhältnisse im Liniengleichnis – so die Behauptung – sind ein Shortcut eines allgemeinen Beweises, der als Spezialfall schon in der Dienerszene enthalten ist, nämlich des Beweises des Satzes des Pythagoras in seiner ‚chinesischen‘ Variante. Dass es dabei möglicherweise mathematik-historische Parallelen zur Geschichte des Beweises gibt, vermag die Richtigkeit der Behauptung untermauern. Eine letzte, zwingende und abschließende Antwort auf die Frage, warum es gerade der Satz des Pythagoras ist, der Platon so stark in seinen Bann zog, kann natürlich auch dieser Aufsatz nicht geben, obwohl sich dafür trefflich, wenn auch nicht zwingend argumentieren ließe. Schließlich ist der Satz des Pythagoras ja nicht irgendein Satz in der Geometrie. Wie auch immer. Vielleicht – und auch das lässt sich nicht ganz ausschließen – sind die Verhältnisse im Liniengleichnis gar nicht so, wie in diesem Aufsatz dargelegt. Vielleicht sind sie einfach zufällig so wie sie sind. Für diesen Fall würde ich Platon ein intuitives Gespür für mathematische Zusammenhänge konzederen und ausrufen: Wenn es auch nicht beabsichtigt ist, so ist es dennoch wirklich gut erfunden.

¹⁴ Maor (wie Anm. 11) 25.

Autor

Dr. Wolfgang Buschlinger
Yorckstr. 10
65195 Wiesbaden
w.buschlinger@philomat.de